MATA9LBAK
LIMITE

BAC C&D

Méthodes
Exemples
BAC mauritanie

+

Kam222rim.blogspot.com

Sommaire

Notions de base.....3
Les formes indéterminées $\mathbf{00}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$ 5
La fonction logarithme népérien 9
Forme indéterminé (log).....17
Fonction exponentiel 20
Récapitulation.....26

Notions de base

La limite de la fonction f(x) c'est la valeur de f(x) quand x est très proche de x_0

Exemple

$F(x) = x^3 - 2x^2 + 12$ $\qquad$ $\boldsymbol{G(x) = \ln(x\ )}$

Méthode 1

Calculer la limite = remplace x_0 dans la fonction

$$\lim_{x \to -2} \boldsymbol{F(x)} = (-2)^3 - 2(2)^2 + 12 = \boldsymbol{-4}$$

$$\lim_{x \to 1} \boldsymbol{G(x)} = \boldsymbol{\ln(1)} = 0$$

Exemple

$F(x) = x^3 - 2x^2 + 12 \quad = x^3$

Méthode 2

Pour fonction polynôme quand $x \to \infty$ la limite égale limite de la plus grande puissance

$$\lim_{x \to -\infty} \boldsymbol{F(x)} = (-\infty)^3 = -\infty$$

Pour les fonctions qui sont définie par deux ou plusieurs expressions

On définie les notions x0+ et x0+ pour calculer la limite quand x tend vers x0 ou x0 c'est le point au bout de la quel l'expression de la fonction se échange

Exemple

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Montrer que g réalise une bijection de IR sur IR

BAC 2011

Condition $\begin{cases} fonction\ polynome \\ x \to \infty \end{cases}$

Donc on applique la méthode 2 (la plus grande puissance ici c'est $-x^3$)

$$g(x) = \boxed{-x^3} - x^2 - 2x + 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -(-\infty)^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -(+\infty)^3 = -\infty$$

g(x)	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		-	
g(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

Les formes indéterminées $\frac{0}{0}$; $+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$

Si on obtient l'un des forme pressement comme résulta du calcul d'une limite donc on doit change l'expression de la fonction pour obtenir un autre résulta car ses forme ne sont pas définie mathématiquement

Exemple

$$F(x) = \frac{3X^2+5X^1+2}{2X+2}$$

Calcul $\lim\limits_{x\to -1} F(x)$

Les conditions $\begin{cases} \textbf{fonction rationnelle sans racine carre} \\ x_0 \neq \infty \end{cases}$

Donc on remplace

$$= \frac{3(-1)^2+(-1)+2}{2(-1)+2} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I}$$

Méthode 3

Pour fonction rationnelle si le résultat du remplacement est $\frac{0}{0}$

On factorise les expressions par (x-x_0)

1 er degré a(x-x_0)

2 eme (x-x_0)(ax+ $\frac{c}{x_0}$)

Les conditions $\begin{cases} \boldsymbol{fonction\ rationnelle\ sans\ racine\ carre} \\ \boldsymbol{x_0 \neq \infty; x_0 = -1} \\ \boldsymbol{= \frac{0}{0}} \end{cases}$

Donc on factorise par $(\boldsymbol{x+1})$

$$\frac{(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{3x+2})}{\boldsymbol{2(x+1)}} = \boldsymbol{F(x)} = \frac{\boldsymbol{3x+2}}{\boldsymbol{2}}$$

$$\lim_{\boldsymbol{x \to -1}} \boldsymbol{F(x)} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{2}}$$

Exemple

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + x + 4} - x$$

Calcul $\lim\limits_{\boldsymbol{x \to +\infty}} \boldsymbol{f(x)}$

Les conditions $\begin{cases} \boldsymbol{fonction\ avec\ racine\ carre} \\ \boldsymbol{x_0 \to \infty} \end{cases}$

Donc plus haut dégrée (la deuxième méthode)

$$\lim_{\boldsymbol{x \to +\infty}} \boldsymbol{f(x)} = 4(+\infty) - (\infty) = +\infty - \infty\ F.I$$

Méthode 4

Pour fonction *avec racine carre* si le résultat du remplacement est $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0\times\infty$ ou $+\infty-\infty$

On multiplie et on divise par le conjugue de expression

$$f(x) = \sqrt{16x^2 + x + 4} - x$$

Les conditions $\begin{cases} \boldsymbol{fonction\ avec\ racine\ carre} \\ \text{le conjugue} = \sqrt{16x^2 + x + 4} + x \\ \boldsymbol{x_0} = \infty; \end{cases}$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{16x^2 + x + 4} - x\right)\left(\sqrt{16x^2 + x + 4} + x\right)}{\left(\sqrt{16x^2 + x + 4} + x\right)}$$

$$f(x) = \frac{16x^2 + x + 4 - x^2}{\left(\sqrt{16x^2 + x + 4} + x\right)}$$

$$f(x) = \frac{16x^2 + x + 4 - x^2}{x\sqrt{16 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} + x}$$

On simplifie par x

$$f(x) = \frac{16x^1 + 1 + \frac{4}{x} - x^1}{\sqrt{16 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1}$$

NB $\forall\ \beta \in \mathrm{R} \quad \frac{\beta}{\infty} = 0 \quad \text{et} \frac{\beta}{\infty} = \infty$

$$\log_{x \to +\infty} f(x) =$$

$$f(x) = \frac{16x^1 + 1 + \frac{4}{x}^{0} - x^1}{\sqrt{16 + \frac{1}{x}^{0} + \frac{4}{x^2}^{0}} + 1}$$

$$\log_{x \to +\infty} f(x) = \frac{16x - x + 1}{4 - 1} = \frac{15(+\infty)}{3} = +\infty$$

La fonction logarithme népérien

On définie # qui peut être un numéro ou une fonction autrement dit # c'est ce qui est a l'intérieur de $ln(\#)$

Méthode 1 si $\# \to 0^+$

$$\lim_{\#\to 0^+} ln(\#) = -\infty$$

$$\lim_{\#\to 0^+} \# ln(\#) = 0$$

Méthode 2 si $\# \to +\infty$

$$\lim_{\#\to +\infty} ln(\#) = +\infty$$

$$\lim_{\#\to +\infty} \frac{ln(\#)}{\#} = 0$$

Exemple

On considère la fonction numérique définie par : $f(x)=2x-3+\ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x^2}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Vérifier que l'ensemble de définition de **f** est $\mathbb{R}^*$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement;

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une notée **D** est oblique. Etudier la position relative de (C) et de **D**.

$$\boldsymbol{a)\ x\to 0}$$

Condition $\begin{cases} = \frac{x^2+2x+2}{x^2} \text{ fonction rationnelle} \\ \lim\limits_{x\to 0} = \frac{2}{0} = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2(0) - 3 + \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\boldsymbol{b)\ x\to +\infty}$$

Condition

$$\begin{cases} = \frac{x^2+2x+2}{x^2} \text{ fonction rationnelle} \\ x\to+\infty \ donc\ le\ plus\ grand\ degree \\ = \frac{x^2}{x^2} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \# = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2(+\infty) - 3 + \ln(1) = +\infty$$

Exemple

Soit **f** la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = x(1-\ln x); & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit **(C)** la courbe représentative de **f** dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1.a) Etudier la continuité et la dérivabilité de **f** à droite de $x_0 = 0$, interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de **f**.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Construire la courbe **(C)**.

BAC 2011

F(x) est continue si $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$$f(x) = x(1 - \ln(x)\ ) = x - xln(x)$$

Les conditions $\begin{cases} = \boldsymbol{x} \\ x \to 0^+ \\ \lim\limits_{\#\to \mathbf{0}^+} \ln() = 0 \end{cases}$

$$\lim_{\#\to 0^+} x - xln(x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$$

Donc f(x) est bien continue en $x_0 = 0$

Donc f n'est pas dérivable en 0 et la courbe de f admet une demi-tangente verticale à droite de 0.

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	1	↘	$-\infty$

Exemple

Partie A

Soit f la fonction de variable réelle x définie par : $f(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$; $x \in IR - \{0;1\}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité **2cm**.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ces limites.

b) Déterminer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2.a) Pour tout x appartenant à $IR - \{0;1\}$, montrer que $f(x) + f(1-x) = 0$. Interpréter ce résultat.

b) Tracer C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) $x \to 0$

Les conditions $\begin{cases} x \not\equiv \infty\ , x = 0 \\ \qquad\qquad = \left|\frac{x}{x-1}.\right| \\ \lim\limits_{x\to 0} \qquad = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\#\to +0} f(x) = \ln(0) = -\infty$$

b) $x \to 1$

Les conditions $\begin{cases} x \not\equiv \infty \, , x = 1 \\ \qquad\qquad = \left|\frac{x}{x-1}.\right| \\ \lim\limits_{x\to 1} \qquad = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{\#\to+\infty} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty$$

c) $x \to -\infty$

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \left|\dfrac{x}{x-1}.\right| \\ X \to \infty \; DONC \; plus \; haut \; degree \\ \qquad\qquad \dfrac{X}{X-1} \to \dfrac{x}{x} = 1 \\ \qquad\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \# = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\#\to 1} f(x) = \ln(1) = 0$$

d) $x \to +\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \# = \\ X \to \infty \; DONC \; plus \; haut \; degree \\ \dfrac{X}{X-1} \to \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \# = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\#\to 1} f(x) = \ln(1) = 0$$

Méthode 3

On définie α une équation

Si α→ **0** Donc

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

Si

$$\lim_{x\to x_0} \alpha = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\alpha\to 0} f(x)$$

Exemple

$$f(x) = \frac{ln(1-x^2+x)}{-x^2+x}$$

Calcul limite de $f(x)$ pour $x \to 1$

$$\textbf{Condition} \begin{cases} \alpha = -x^2 + x \\ x_0 \to 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} \alpha = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{\alpha\to 0} f(x) = 1$$

Exemple

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Calcul les limite à la borne des intervalles
Montres que f est continue en 0

$$\begin{cases} x \to -1^+ \\ \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \# = 0 \end{cases} = 1 + x$$

$$\lim_{X\to 1^+} f(x) = \frac{ln(0)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \to 0^-} \\ \boldsymbol{il\ y\ a\ x\ au\ denomenateur} \end{cases} \quad 1 + \boldsymbol{x\ de\ la\ forme\ 1 + \alpha}\ ou\ x = \boldsymbol{\alpha}$$

$$\lim_{\boldsymbol{X \to 0^-}} \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ln(1+x)}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{ln(1+\alpha)}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \to 0^+} \\ \boldsymbol{il\ y\ a\ x\ au\ denomenateur} \end{cases} \quad = 1 + \boldsymbol{x\ de\ la\ forme\ 1 + \alpha}\ ou\ x =$$

$$\lim_{\boldsymbol{X \to 0^-}} \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ln(1+x)}}{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{ln(1+\alpha)}}{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x \to +\infty} \\ \lim\limits_{\boldsymbol{x \to +\infty}} \# = +\infty \end{cases} \quad = 1 + \boldsymbol{x}$$

$$\lim_{\boldsymbol{X \to 0^-}} \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{ln(+\infty)}}{+\infty} = \mathbf{0}$$

$\lim\limits_{X \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^-} f(x) = f(0) = 1\ donc\ f\ est\ continue\ en\ 0$

Forme indéterminé (log)

Exemple

Calculer limite de f(x) quand x → $+\infty$

$$f(x) = \ln(3x) - x$$

Condition ici # = 3x-1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \# = 3(+\infty) - 1 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ln(+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty$ F.I

Si # → $+\infty$ et le resautât de est un F.I Donc on factorise l'expression par #

$$\#\left(\frac{\boldsymbol{F(x)}}{\#}\right)$$

$$\lim_{\#\to+\infty} \frac{\boldsymbol{ln(\#)}}{\#} = \mathbf{0}$$

$$f(x) = 3x\left(\frac{\ln(3x -)}{3x} - \frac{x}{3x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3(+\infty)(0 - \frac{1}{3}) = +\infty$$

Exemple

$$g(x) = \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

Les conditions $\begin{cases} = 2 - x \\ x \to 1 \end{cases}$ donc on remplace

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{\ln(1)}{1-1} = \frac{0}{0}\ F.I$$

Si # → 1 et le résultât de est un F.I Donc on multiplie l'expression et on la divise par son dénominateur

$$g(x) = \frac{(x-1)\ln(2-x)}{(x-1)(x-1)}$$

$$g(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)(\ln(2-x))$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \left(\frac{1-1}{2}\right)(\ln(2-1)) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \left(\frac{1-1}{2}\right)(\ln(2-1)) = 0$$

$$\left(\frac{0}{2}\right) \qquad (0)$$

Fonction exponentiel

On définie # qui peut être un numéro ou une fonction autrement dit # c'est ce qui est en puissance de la fonction exponentiel $\boldsymbol{e}^{\#}$

Méthode 1 si $\# \to -\infty$

$$\lim_{\#\to-\infty} \boldsymbol{e}^{\#} = 0$$

$$\lim_{\#\to-\infty} \#\boldsymbol{e}^{\#} = 0$$

Méthode 2 si $\# \to +\infty$

$$\lim_{\#\to-\infty} \boldsymbol{e}^{\#} = +\infty$$

$$\lim_{\#\to-\infty} \frac{\boldsymbol{e}^{\#}}{\#} = +\infty$$

Exemple

Calculer limite quand # → 0 de f(x)

$$f(x) = \frac{e^{4x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{e^{0} - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad F.I$$

Méthode 3 si # → 0

$$\boldsymbol{\lim_{\# \to -0} \frac{e^{\#} - 1}{\#} = 1}$$

$$f(x) = 4\left(\frac{e^{4x} - 1}{4x}\right)$$

$$f(x) = 4\left(\frac{e^{4x} - 1}{4x}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4$$

Exemple

Calculer limite quand $x \to +\infty$ de f(x)

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-2x}$$

Les conditions $\begin{cases} = -2x \\ fonction\ polynome\ fois\ expo \end{cases}$

Méthode 4

on définie $p(x)$ fonction polynôme

$\forall\ p(x)$ on a que

$$\lim_{\#\to-\infty} p(x)e^{\#} = 0$$

$$\lim_{\#\to+\infty} \# = -2(+\infty) = -\infty$$

Donc

$$\lim_{\#\to+\infty} f(x) = 0$$

Exemple

$$f(x) = \frac{e^{x+1} + 2}{e^{x+1} - 4}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{e^{+\infty} + 2}{e^{+\infty} - 4} = \frac{\infty}{\infty} \quad F.I$$

Méthode 5

Si #→ ∞ et $e^{\#}$ existe dans le numérateur et le dénominateur donc on factorise par $e^{\#}$ les deux expressions

Les conditions

$$\begin{cases} = x + 1 \\ e^{\#} \text{ existe dans le nimerateur et dans le denomi} \end{cases}$$

Donc

$$f(x) = \frac{e^{x+1}(1 + 2e^{-x-1})}{e^{x+1}(1 - 4e^{-x-1})}$$

$$f(x) = \frac{\cancel{e^{x+1}}(1 + 2e^{-x-1})}{\cancel{e^{x+1}}(1 - 4e^{-x-1})}$$

Les conditions $\begin{cases} = -x - 1 \\ e^{-\infty} = 0 \end{cases}$ donc

$$f(x) = \frac{(1 + \cancel{2e^{-x-1}})}{(1 - \cancel{4e^{-x-1}})} \quad \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

Récapitulation

Méthode 1

Calculer la limite = remplace x_0 dans la fonction

Méthode 2

Pour fonction polynôme quand $x \to \infty$ la limite égale limite de la plus grande puissance

Méthode 3

Pour fonction rationnelle si le résultat du remplacement est $\frac{0}{0}$

On factorise les expressions par $(x-x_0)$

1 er degré $a(x-x_0)$

2 eme degré $(x-x_0)(ax+\frac{c}{x_0})$

Méthode 4

Pour fonction *avec racine carre* si le résultat du remplacement est $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0\times\infty$ ou $+\infty-\infty$

On multiplie et on divise par le conjugue de expression

La fonction logarithme népérien

Méthode 1 si $\# \to 0^+$

$$\lim_{\#\to 0^+} ln(\#) = -\infty$$

$$\lim_{\#\to 0^+} \#ln(\#) = 0$$

Méthode 2 si $\# \to +\infty$

$$\lim_{\#\to +\infty} ln(\#) = +\infty$$

$$\lim_{\#\to +\infty} \frac{ln(\#)}{\#} = 0$$

Méthode 3

On définie α une équation

Si $\alpha \to 0$ Donc

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

Si $\# \to +\infty$ et le resautât de est un F.I Donc on factorise l'expression par #

$$\#\left(\frac{F(x)}{\#}\right)$$

$$\lim_{\#\to +\infty} \frac{ln(\#)}{\#} = 0$$

Fonction exponentiel

Méthode 1 si $\# \to -\infty$

$$\lim_{\#\to-\infty} e^{\#} = 0$$
$$\lim_{\#\to-\infty} \#e^{\#} = 0$$

Méthode 2 si $\# \to +\infty$

$$\lim_{\#\to-\infty} e^{\#} = +\infty$$
$$\lim_{\#\to-\infty} \frac{e^{\#}}{\#} = +\infty$$

Méthode 3 si $\# \to 0$

$$\lim_{\#\to-0} \frac{e^{\#}-1}{\#} = 1$$

Méthode 4

on définie $p(x)$ fonction polynôme

$\forall\, p(x)$ on a que

$\lim_{\#\to-\infty} p(x)e^{\#} = 0$

Méthode 5

Si $\#\to \infty$ et $e^{\#}$ existe dans le numérateur et le dénominateur donc on factorise par $e^{\#}$ les deux expressions

أعزائي الطلاب. شكرا لكم على تفاعلكم معنا.

يمكنكم التواصل معنا عن طريق صفحة الفيسبوك

www.facebook.com/kam.mr222

أو زيارة مدونتنا للمزيد من الكتب و الدروس

Kam222rim.blogspot.com

شكرا لكم و دائما منصتنا هي طريق نحو اكبر الجامعات و مدارس المهندسين

Cher étudiants et étudiantes merci pour votre fidélité Vous pouvez nous contacter sur notre page Face book
www.facebook.com/kam.mr222

Ou sur notre blog

Kam222rim.blogspot.com

Merci Knowledge Académie Mauritanie - KAM Votre chemin vers les plus grands facultés et écoles l'ingénierie